

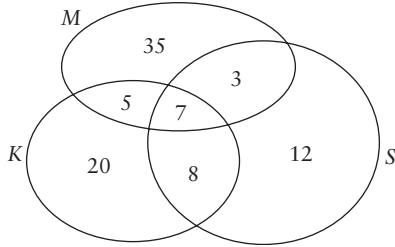
Bileşim Kümesinin Eleman Sayısı ve Birkaç Aritmetiksel Eşitlik

Adam Dan Dick

Herkesin nefret ettiği türden bir problemle başlayalım. Bir toplulukta 50 kişi maviyi, 40 kişi kırmızıyı, 30 kişi sarıyı, 12 kişi hem maviyi hem kırmızıyı, 10 kişi hem maviyi hem sarıyı, 15 kişi hem kırmızıyı hem sarıyı, 7 kişi hem maviyi hem kırmızıyı hem de sarıyı seviyor. Bu toplulukta mavi, kırmızı ya da sarı renklerinden en az birini seven kaç kişi vardır?

Tam bir ahret sorusu!

Biraz düşününce durumun aşağıdaki gibi olması gerektiği ve toplam $35 + 20 + 12 + 3 + 5 + 8 + 7$



= 90 kişinin bu üç renkten en az birini sevdiği anlaşılır.

Aynı yanıtı hiç düşünmeden, sadece verilere bakarak, şu şekilde de bulabileceğimiz sizi şaşırtabilir:

$$(50 + 40 + 30) - (12 + 10 + 15) + 7 = 90.$$

Bu yazıda ikinci yöntemin neden doğru yanıtı verdiğini göreceğiz, yani M, K, S kümelerinin birleşiminin eleman sayısını bu kümelerin eleman sayısından ve ikişer ikişer kesişimlerinin eleman sayısından ve üçünün birden kesişiminin eleman sayısından,

$$\begin{aligned} |M \cup K \cup S| &= |M| + |K| + |S| \\ &\quad - (|M \cap K| + |K \cap S| + |S \cap M|) \\ &\quad + |M \cap K \cap S| \end{aligned}$$

formülüyle elde edilebileceğini göreceğiz.

Bunu sadece M, K, S diye üç kümeyle değil,

$$T_1, T_2, \dots, T_n$$

diye adlandıracağımız herhangi n tane sonlu kümeyle de yapabiliriz: Bu kümelerin her birinin eleman sayısı verilmişse, ayrıca ikişer ikişer kesişimlerinin eleman sayısı verilmişse, ayrıca üçer üçer kesişimlerinin eleman sayısı verilmişse, ayrıca dörder dörder kesişimlerinin eleman sayısı verilmişse ve böylece mümkün olan tüm kesişimlerinin eleman

sayısı verilmişse,

$$T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n$$

birleşiminin eleman sayısını bulabiliriz.

Kanıtlayacağımız formülü $n = 3$ için yukarıda yazdık. $n = 2$ için oldukça basit:

$$|T_1 \cup T_2| = |T_1| + |T_2| - |T_1 \cap T_2|.$$

Son olarak, $n = 4$ için yazalım:

$$T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$$

birleşiminin eleman sayısı

$$T_1, T_2, T_3, T_4$$

kümelerinin eleman sayısının toplamı, **eksi,**

$$T_1 \cap T_2, T_1 \cap T_3, T_1 \cap T_4,$$

$$T_2 \cap T_3, T_2 \cap T_4, T_3 \cap T_4$$

kümelerinin eleman sayısının toplamı, **artı,**

$$T_1 \cap T_2 \cap T_3, T_1 \cap T_2 \cap T_4,$$

$$T_1 \cap T_3 \cap T_4, T_2 \cap T_3 \cap T_4$$

kümelerinin eleman sayısının toplamı, **eksi,**

$$T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4$$

kümesinin eleman sayısı olarak bulunur. Eğer, örneğin, $T_1 \cap T_2 \cap T_4$ yerine $T_{1,2,4}$ yazarsak, formülü, $n = 4$ için

$$\begin{aligned} |T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4| &= |T_1| + |T_2| + |T_3| + |T_4| \\ &\quad - (T_{1,2} + T_{1,3} + T_{1,4} + T_{2,3} + T_{2,4} + T_{3,4}) \\ &\quad + (T_{1,2,3} + T_{1,2,4} + T_{1,3,4} + T_{2,3,4}) \\ &\quad - T_{1,2,3,4} \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz.

Sanırım $n = 5$ için formülün ne olacağı tahmin edilmiştir.

Konumumuzu belirleyelim ve formülü en ekonomik biçimde yazabilmek için bir tanım verelim. n tane sonlu küme alalım. Bu kümelere

$$T_1, T_2, \dots, T_n$$

adını verelim. Ayrıca, $i_1, \dots, i_j \in \{1, \dots, n\}$ için,

$$T_{i_1, \dots, i_j} = T_{i_1} \cap T_{i_2} \cap \dots \cap T_{i_j}$$

tanımını yapalım. Elbette, örneğin,

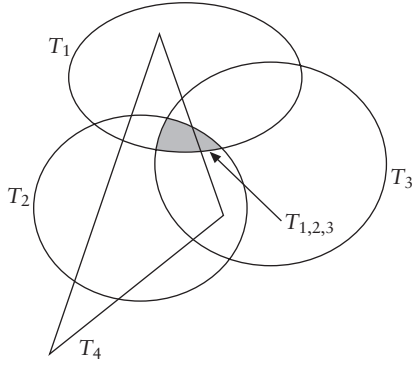
$$T_{1,4,2} = T_{4,1,2} = T_{2,4,1} = T_{1,2,4}$$

olur. Bundan böyle T_{i_1, \dots, i_j} yazılımını, sadece

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq n$$

eşitsizliğini sağlayan i_1, i_2, \dots, i_j göstergeçleri için kullanacağız.

Şimdi kanıtlayacağımız formülü matematiksel olarak yazabiliriz:



Teorem 1. Yukarıdaki notasyonla,

$$\left| \bigcup_i T_i \right| = \sum_i |T_i| - \sum_{i_1 < i_2} |T_{i_1, i_2}| + \sum_{i_1 < i_2 < i_3} |T_{i_1, i_2, i_3}| - \dots$$

yani,

$$\left| \bigcup_{i=1}^n T_i \right| = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} |T_{i_1, \dots, i_j}| \right)$$

olur.

Kanıt: Önce biraz düşünelim.

$$\sum_{i=1}^n |T_i|$$

toplamında birçok elemanı birkaç kez sayıyoruz. Bu toplamda her eleman kaç tane T_i 'nin içindeyse, o kadar kez sayılıyor. Örneğin bir eleman T_1, T_2, T_4 kümelerindeyse ve diğerlerinde değilse, o zaman bu eleman toplamda tam üç kez sayılıyor. Açıkça görülmesi de kanıtımızda bizi yönlendiren fikir budur.

Herhangi bir t elemanı ve $i = 1, \dots, n$ için

$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{eğer } t \in T_i \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } t \notin T_i \text{ ise} \end{cases}$$

tanımını yapalım. O zaman, biraz düşününce kolaylıkla görülebileceği üzere, her $t \in T$ için,

$$\prod_{i=1}^n (1 - t_i) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } t \in \bigcup_{i=1}^n T_i \text{ ise} \\ 1 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olur. Demek ki, her $t \in T$ için,

$$1 - \prod_{i=1}^n (1 - t_i) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } t \in \bigcup_{i=1}^n T_i \text{ ise} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

ve dolayısıyla,

$$\sum_t \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - t_i) \right) = \left| \bigcup_{i=1}^n T_i \right| \quad (*)$$

bulunur. Şimdi soldaki ifadedeki çarpımı açalım.

$$\prod_{i=1}^n (1 - t_i) = (1 - t_1)(1 - t_2) \dots (1 - t_n) \\ = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n, j \geq 0} (-1)^j t_{i_1} \dots t_{i_j}$$

buluruz. (İkinci eşitlik görüldüğü kadar zor değildir... $j = 0$ olduğunda, $t_{i_1} \dots t_{i_j}$ çarpımının 1 olduğunu varsayıyoruz.) Bundan kolaylıkla

$$1 - \prod_{i=1}^n (1 - t_i) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n, j > 0} (-1)^{j+1} t_{i_1} \dots t_{i_j}$$

çıkar. ($j = 0$ için elde edilen 1 sadeleşti.) Demek ki, (*) formülünün solundaki

$$\sum_t \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - t_i) \right)$$

ifadesi

$$\sum_t \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n, j > 0} (-1)^{j+1} t_{i_1} \dots t_{i_j}$$

ifadesine eşit. Şimdi bu son ifadeyle oynayalım.

Önce,

$$\sum_t \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n, j > 0} (-1)^{j+1} t_{i_1} \dots t_{i_j} \\ = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n, j > 0} \sum_t (-1)^{j+1} t_{i_1} \dots t_{i_j} \\ = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n, j > 0} \left((-1)^{j+1} \sum_t t_{i_1} \dots t_{i_j} \right)$$

eşitliğini görelim. Hesaplara kısa bir ara verip en sağdaki toplamın ne olduğuna bakalım. t_i 'lerin tanımından, hemen,

$$t_{i_1} \dots t_{i_n} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } t \in T_{i_1} \cap \dots \cap T_{i_n} \text{ ise} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

eşitliği çıkar. Demek ki,

$$\sum_t t_{i_1} \dots t_{i_j} = \left| T_{i_1} \cap \dots \cap T_{i_j} \right|$$

dir. Yukarıda başladığımız hesaba devam edelim.

$$\sum_t \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n, j > 0} (-1)^{j+1} t_{i_1} \dots t_{i_j} \\ = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n, j > 0} \sum_t (-1)^{j+1} t_{i_1} \dots t_{i_j} \\ = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n, j > 0} \left((-1)^{j+1} \sum_t t_{i_1} \dots t_{i_j} \right) \\ = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n, j > 0} (-1)^{j+1} \left| T_{i_1} \cap \dots \cap T_{i_j} \right| \\ = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} |T_{i_1, \dots, i_j}| \right).$$

İstedığımızı kanıtladık. \square

Belki biraz acılı bir kanıt oldu ama değdiğini göstereyim. Önemli ve oldukça zor bir soruyu bu teoremin yardımıyla yanıtlayalım ve yanıtın son derece ilginç sonuçlarını bulalım [bkz. MD-2003-I, sayfa xx-xx].

Teorem 2. Eğer $m \leq n$ ise n elemanlı bir kümeden m elemanlı bir kümeye giden

$$(-1)^m \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} k^n$$

tane örten fonksiyon vardır.

Kanıt: Eğer $n < m$ ise yanıt 0'dır elbet. Eğer $n = m$ ise, her örten fonksiyon birebir olmak zorunda ol-

duğundan, yanıt $m!$ 'dir. Genel yanıtı bulacağız. A ve B , sırasıyla n ve m elemanlı iki küme olsun.

Fonk(A, B), ya da kısacxa F , A 'dan B 'ye giden fonksiyonlar kümesi olsun. A 'nın her elemanı B 'nin m elemanından herhangi birine gidebileceği için, F 'nin tam m^n tane elemanı vardır: $|F| = m^n$.

Her $i \in B$ için, F_i , A 'dan $B \setminus \{i\}$ kümesine giden fonksiyonlar kümesi olsun. Bir başka deyişle,

$$F_i = \{f \in F : \text{her } x \in A \text{ için } f(x) \neq i\}$$

olsun. Aynen biraz önce söylediğimiz gibi,

$$|F_i| = (m-1)^n.$$

Örten olmayan her fonksiyon F_i kümelerinden birinin elemanıdır. Demek ki örten fonksiyonlar kümesi $F \setminus \cup_{i \in B} F_i$ kümesidir. Eğer $\cup_{i \in B} F_i$ kümesinin eleman sayısını bulursak sorumuzu yanıtlayabiliriz.

Önce, her $k \leq m$ için, eğer i_1, i_2, \dots, i_k , B 'nin bir-birinden farklı k elemanıysa,

$$|F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \dots \cap F_{i_k}| = (m-k)^n.$$

eşitliğine dikkati çekelim, çünkü bu kesişim n elemanlı A kümesinden B 'nin $m-k$ elemanlı bir altkümesine giden fonksiyonlar kümesidir.

Şimdi Teorem 1'den yararlanarak,

$$\cup_{i \in B} F_i \text{ kümesinin eleman sayısını bulalım. } B \text{'nin tam} \\ \binom{m}{j}$$

tane j elemanlı altkümeleri olduğundan,

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^m F_i \right| &= \sum_{j=1}^m (-1)^{j+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} |F_{i_1, \dots, i_j}| \right) \\ &= \sum_{j=1}^m (-1)^{j+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} (m-j)^n \right) \\ &= \sum_{j=1}^m (-1)^{j+1} \binom{m}{j} (m-j)^n \\ &= \sum_{j=1}^m (-1)^{j+1} \binom{m}{m-j} (m-j)^n \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k+1} \binom{m}{k} k^n \end{aligned}$$

elde ederiz. Demek ki örten fonksiyon sayısını, $m!$ 'den bu sayıyı çıkartarak buluruz. Bu sayı,

$$\begin{aligned} m^n - \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k+1} \binom{m}{k} k^n \\ = m^n + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^n = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^n \\ = (-1)^m \sum_{k=0}^m (-1)^{-k} \binom{m}{k} k^n = (-1)^m \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} k^n \end{aligned}$$

dir. Teoremimiz kanıtlanmıştır. \square

Sonuç 3. Eğer $n < m$ ise,

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} k^n = 0$$

dir.

Kanıt: $n < m$ ise, n elemanlı bir kümeden m elemanlı bir kümeye giden örten bir fonksiyon yoktur. Bir önceki teoremin kanıtında da $m \leq n$ varsayımı yapılmadı; dolayısıyla teorem $m > n$ ise de geçerlidir. \square

Sonuç 4. Her n doğal sayısı için,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^n = (-1)^n n!$$

dir.

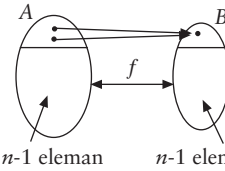
Kanıt. Teoremde $n = m$ alacağız. Eğer A ve B kümelerinin eleman sayısı eşitse, her ikisinde de n eleman varsa, A 'dan B 'ye giden her örten fonksiyon bir eşlemedir ve bu eşlemelerin sayısı $n!$ 'dir. Sonuç, Teorem 2'nin ve bu dediğimiz doğrudan bir sonucudur. \square

Sonuç 5. Her n doğal sayısı için,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^{n+1} = (-1)^n \frac{n \times (n+1)!}{2}$$

dir.

Kanıt: A kümesinin $n+1$, B kümesinin n tane elemanı olsun. A 'dan B 'ye giden örten fonksiyonları elle hesaplayalım. Eğer $f : A \rightarrow B$ örten bir fonksiyonsa, A 'nın iki elemanı B 'nin tek bir ele-



Örten bir fonksiyon bulmak için 1) A 'dan iki eleman seç, 2) B 'den bir eleman seç, 3) A ve B 'nin geri kalan $n-1$ elemanı arasında bir eşleme seç.

manına gitmeli ve A 'nın geri kalan $n-1$ elemanı ile B 'nin geri kalan $n-1$ elemanı arasında bir eşleme olmalı. Dolayısıyla A 'dan B 'ye giden örten fonksiyon sayısı,

$$\binom{n+1}{2} \binom{n}{1} (n-1)! = \frac{(n+1)n}{2} \times n \times (n-1)! = \frac{n \times (n+1)!}{2}$$

dir. Teorem 2 ve bu bilgi birleştirilerek istenen sonuç elde edilir. \clubsuit