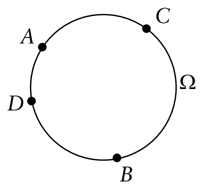
Cahit Arf Matematik Günleri IV - 2005

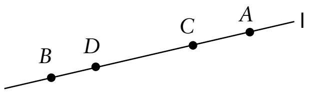
Hilbert Mesafesi

İkinci Gün Soruları, 16 Nisan 2005

Andrei Ratiu* / *ratiu@bilgi.edu.tr*

$\mathbb{R}^2$ *Öklid düzleminde aynı l doğrusu veya aynı Ω çemberi üzerindeki olan dört farklı A, B, C, D noktası alalım.*





*A, B, C, D noktalarının **çapraz oranı**,*

$$(A,B,C,D)=\frac{d(A,C)}{d(A,D)}:\frac{d(B,C)}{d(B,D)}$$

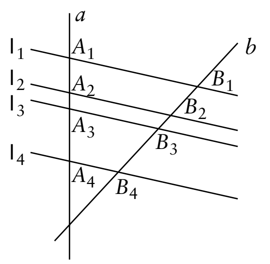
olarak tanımlanır. Bu tanımda $d(P, Q)$, P ile Q noktaları arasındaki Öklid uzaklığını simgelemektedir, yani $P(a, b)$ ve $Q(c, d)$ ise,

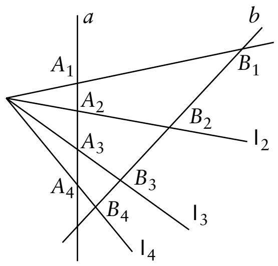
$$d(P,Q)=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}.$$

1. $(A, B, C, D) = (C, D, A, B) = (B, A, C, D)^{-1} = (A, B, D, C)^{-1}$ *eşitliklerini kanıtlayın.*

Yanıt: Bu çok kolay, her P ve Q noktası için $d(P, Q) = d(Q, P)$ eşitliğinden kaynaklanır.

2. l_1, l_2, l_3, l_4 doğruları a doğrusunu A_1, A_2, A_3, A_4 noktalarında ve b doğrusunu B_1, B_2, B_3, B_4 noktalarında kessinler.





2a) l_1, l_2, l_3, l_4 *doğruları paralelse*

$(A_1, A_2, A_3, A_4) = (B_1, B_2, B_3, B_4)$

eşitliğini gösterin.

Çözüm: Bu durumda, benzer üçgenlerden dolayı,

$$\frac{B_1B_3}{A_1A_3}=\frac{B_1B_4}{A_1A_4}=\frac{B_2B_3}{A_2A_3}=\frac{B_2B_4}{A_2A_4}$$

eşitlikleri vardır; Bundan da $(A_1, A_2, A_3, A_4) = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ eşitliği çıkar.

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü.

2b) l_1, l_2, l_3, l_4 *doğruları tek bir noktada kesişiyorlarsa* $(A_1, A_2, A_3, A_4) = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ *eşitliğini gösterin.*

Çözüm: A_i noktasının l_j doğrusuna uzaklığını $d(A_i, l_j)$ ile gösterelim. Bu durumda benzerlikten

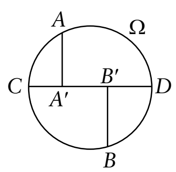
$$\frac{A_1A_3}{A_2A_3}=\frac{d(A_1,l_3)}{d(A_2,l_3)} \text{ ve } \frac{A_1A_4}{A_2A_4}=\frac{d(A_1,l_4)}{d(A_2,l_4)}$$

eşitlikleri çıkar. l_i ve l_j doğruları arasındaki açıyı λ_{ij} ile gösterirsek, yukardaki eşitliklerden,

$$(A_1,A_2,A_3,A_4)=\frac{d(A_1,l_3)}{d(A_2,l_3)}:\frac{d(A_1,l_4)}{d(A_2,l_4)}$$
$$=\frac{\sin\lambda_{13}}{\sin\lambda_{23}}:\frac{\sin\lambda_{14}}{\sin\lambda_{24}}.$$

çıkar. Aynı eşitlik (B_1, B_2, B_3, B_4) için de geçerli olduğundan, $(A_1, A_2, A_3, A_4) = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ eşitliği doğrudur.

3. *Bir Ω çemberi üzerinde, CD bir çap oluşturmak üzere, A, B, C ve D noktaları alınmış olsun. A'nın CD üzerindeki izdüşümü A' ve B'ninki ise B' olsun.*



$$(A, B, C, D)^2 = (A', B', C, D)$$

eşitliğini gösterin.

Çözüm: CD bir çap oluşturduğu için şu eşitlikleri biliyoruz:

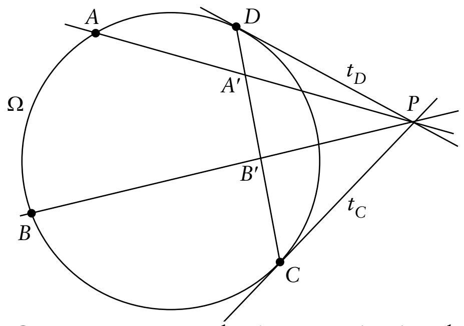
$$AC^2 = A'C\cdot DC$$
$$AD^2 = A'D\cdot DC$$
$$BC^2 = B'C\cdot DC$$
$$BD^2 = B'D\cdot DC$$

Buradan kolaylıkla $(A, B, C, D)^2 = (A', B', C, D)$ sonucunu çıkarabiliriz.

4. *Bir Ω çemberi üzerinde A, B, C, D noktaları alınmış olsun. t_C ve t_D doğruları (bu sırayla) C ve D noktalarından geçen iki teğet olsun. (Bir sonraki sayfadaki şekle bakın.) Bu teğetler P noktasında kesişsinler. A', AP ve CD doğrularının, B' ise BP ve CD doğru parçalarının kesişim noktaları olsun.*

$$(A, B, C, D)^2 = (A', B', C, D)$$

eşitliğini gösterin.



Çözüm: Eğer çemberin çevresi r ise, kolayca, $AC = 2r\sin(ACP)$ bulunur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} AC^2 \cdot CP &= AC \cdot CP \cdot 2r\sin(ACP) \\ &= 4r\,\mathrm{Alan}(ACP) \\ &= AP \cdot CP \cdot 2r\sin(APC). \end{aligned}$$

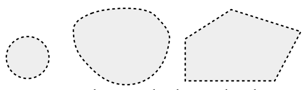
Benzer biçimde,

$$AD^2 \cdot DP = AP \cdot DP \cdot 2r\sin(APD)$$
$$BC^2 \cdot CP = BP \cdot CP \cdot 2r\sin(BPC)$$
$$BD^2 \cdot DP = BP \cdot DP \cdot 2r\sin(BPD)$$

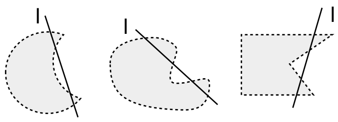
eşitlikleri geçerlidir. Bu eşitlikleri göz önünde bulundurarak hesaplayalım:

$$\begin{aligned} (A,B,C,D)^2 &= \frac{AC^2}{AD^2} : \frac{BC^2}{BD^2} = \frac{AC^2 \cdot CP}{AD^2 \cdot DP} : \frac{BC^2 \cdot CP}{BD^2 \cdot DP} \\ &= \frac{AP \cdot CP \cdot \sin(APC)}{AP \cdot DP \cdot \sin(APD)} : \frac{BP \cdot CP \cdot \sin(BPC)}{BP \cdot DP \cdot \sin(BPD)} \\ &= \frac{\sin(APC)}{\sin(APD)} : \frac{\sin(BPC)}{\sin(BPD)} = (A', B', C, D). \end{aligned}$$

*$U \subseteq \mathbb{R}^2$ olsun. Eğer U sonlu yarıçaplı bir dairenin içindeyse U'ya **sınırlı** denir. Eğer her l doğrusu için, $l \cap U$ açık (yani sınır noktalarını içermeyen) bir doğru parçasıysa (**Not:** Boşküme de açık bir doğru parçasıdır) U'ya **içbükey alan** denir.*

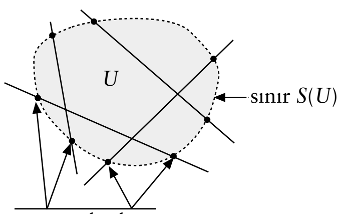


Sınırlı ve içbükey alanlar

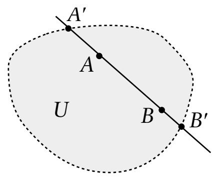


Sınırlı ama içbükey olmayan alanlar

*Bundan böyle U, $\mathbb{R}^2$'nin sınırlı bir içbükey alanını simgeleyecek. Her l doğrusu için $l \cap U$ doğru parçalarının sınır noktalarının kümesi $S(U)$ olsun. $S(U)$ kümesine U alanının **sınırı** adı verilir.*



$A, B \in U$ iki değişik nokta olsun. $S(U) \cap AB = \{A', B'\}$ olsun. (Burada AB, A ve B noktalarından geçen doğrudur.) Ayrıca bu noktaların şekilde görüldüğü gibi A', A, B, B' sırasıyla sıralandıklarını varsayalım. Şimdi $\rho_U(A, B)$ sayısını,



$$\rho_U(A, B) = \ln(A, B, B', A')$$

*olarak tanımlayalım. (**Not:** ln fonksiyonunun yani logaritmanın tanımını ve tüm özelliklerini bilmeniz gerekmiyor. Logaritma fonksiyonu hakkında bilmeniz gereken özellikler en sonda özet olarak verilmiştir.) Ayrıca her $A \in U$ için $\rho_U(A, A) = 0$ olsun. Birazdan ρ_U fonksiyonunun U'nun iki noktası arasında bir çeşit mesafe ölçtüğünü kanıtlayacağız.*

Logaritma

a) ln (ya da log) sadece pozitif sayılar için tanımlanmış bir fonksiyondur.
b) $\ln 1 = 0$,
c) Her pozitif x, y için, $\ln xy = \ln x + \ln y$,
d) ln artan bir fonksiyondur, yani $0 < x < y$ için $\ln x < \ln y$ eşitsizliği geçerlidir.

5. *Aşağıdaki önermeleri kanıtlayın.*

5a. *Her $A, B \in U$ için $\rho_U(A, B) \geq 0$'dır.*

5b. *$\rho_U(A, B)$, ancak ve ancak $A = B$ ise 0 olabilir.*

5c. *Her $A, B \in U$ için, $\rho_U(A, B) = \rho_U(B, A)$.*

5d. *Eğer B noktası A ve C noktalarının arasındaysa, $\rho_U(A, C) = \rho_U(A, B) + \rho_U(B, C)$.*

Çözüm: (a, b). Eğer A ve B, U'da iki farklı nokta ise $d(A, B') > d(B, B')$ ve $d(B, A') > d(A, A')$ dır. Dolayısıyla

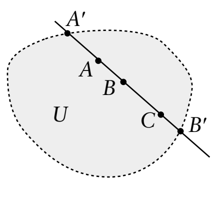
$$(A, B, B', A') = \frac{d(A,B)}{d(B,B')} : \frac{d(A,A')}{d(B,A')} > 1$$

ve $\rho_U(A, B) > 0$ olur. Ayrıca tanım gereği $\rho_U(A, A) = 0$.

c) Birinci sorudan dolayı,

$$\begin{aligned} \rho_U(A, B) &= \ln(A, B, B', A') \\ &= \ln(B, A, A', B') = \rho_U(B, A). \end{aligned}$$

d) B noktasının A ve C noktaları arasında olduğunu göz önünde bulundurarak doğrudan hesaplayalım:



$$\begin{aligned} &\rho_U(A, B) + \rho_U(B, C) \\ &= \ln(A, B, B', A') + \ln(B, C, B', A') \\ &= \ln((A, B, B', A') \cdot (B, C, B', A')) \end{aligned}$$

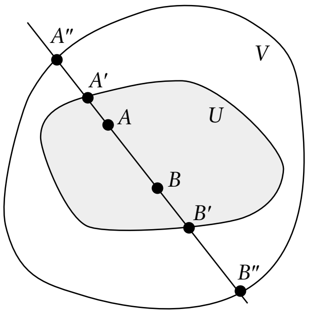
$$= \ln\left(\left(\frac{d(A,B')}{d(A,A')} : \frac{d(B,B')}{d(B,A')}\right) \cdot \left(\frac{d(B,B')}{d(B,A')} : \frac{d(C,B')}{d(C,A')}\right)\right)$$

$$= \ln\left(\frac{d(A,B')}{d(A,A')} : \frac{d(C,B')}{d(C,A')}\right) = \ln(A,C,B',A') = \rho_U(A,C).$$

6. *U ve V iki sınırlı içbükey alan olsun. Eğer $U \subseteq V$ ise, her A, $B \in U$ için,*

$$\rho_V(A, B) \leq \rho_U(A, B)$$

eşitsizliğini gösterin.



Çözüm: $AB \cap S(U) = \{A', B'\}$ ve $AB \cap S(V) = \{A'', B''\}$ yukardaki şekildeki gibi olsun. ln artan bir fonksiyon olduğundan, $(A, B, B', A') \geq (A, B, B'', A'')$ eşitsizliğini göstermemiz yeterli. Eğer

$$\delta_A = d(A', A'') \geq 0 \text{ ve } \delta_B = d(B', B'') \geq 0$$

ise,

$$(A,B,B'',A'') = \frac{d(A,B'')}{d(A,A'')} : \frac{d(B,B'')}{d(B,A'')} = \frac{d(A,B'')}{d(B,B'')} \frac{d(B,A'')}{d(A,A'')}$$

$$= \frac{d(A,B') + d(B',B'')}{d(B,B') + d(B',B'')} \frac{d(B,A') + d(A',A'')}{d(A,A') + d(A',A'')}$$

$$= \frac{d(A,B') + \delta_B}{d(B,B') + \delta_B} \frac{d(B,A') + \delta_A}{d(A,A') + \delta_A}$$

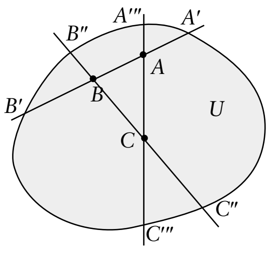
eşitlikleri ve $d(A, B') > d(B, B')$ ve $d(B, A') > d(A, A')$ eşitsizliklerinden dolayı, eğer $a \leq b$ ve $\delta \geq 0$ ise,

$$\frac{a+\delta}{b+\delta} \leq \frac{a}{b}$$

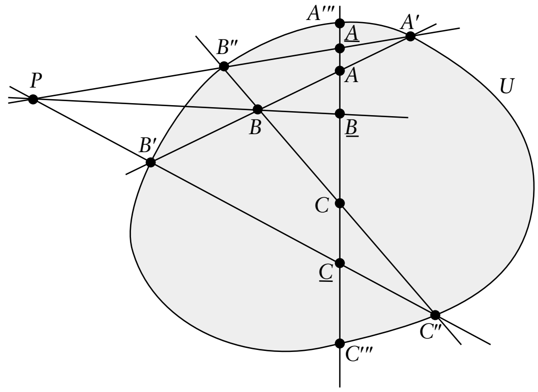
eşitsizliğini kanıtlamak yeterlidir. Ama bu son eşitsizliğin doğru olduğunu kanıtlamak çok kolay.

7. *U, sınırlı bir içbükey alan ve A, B, $C \in U$ olsun. $\rho_U(A, C) \leq \rho_U(A, B) + \rho_U(B, C)$ eşitsizliğini kanıtlayın.*

Kanıt: Önce sınır noktalarımızı belirleyelim:



$AB \cap S(U) = \{A', B'\}$, $BC \cap S(U) = \{B'', C''\}$, $AC \cap S(U) = \{A''', C'''\}$ yandaki şekildeki gibi olsun. V, $A'B''$ ve $B'C''$ doğruları arasında kalan



U'nun noktalar kümesine V diyelim. $A'B''$ ve $B'C''$ doğrularının kesişim noktasına P diyelim. PA', PB ve PC'' doğrularıyla AC doğrusunun kesişim noktalarına sırasıyla $\underline{A}$, $\underline{B}$ ve $\underline{C}$ diyelim. Bu durumda, 2b'den dolayı,

$$\rho_U(A, B) = \ln(A, B, B', A') = \ln(A, \underline{B}, \underline{C}, \underline{A}) = \rho_V(A, \underline{B})$$

ve

$$\rho_U(B, C) = \ln(B, C, C'', B'') = \ln(\underline{B}, C, \underline{C}, \underline{A}) = \rho_V(\underline{B}, C)$$

eşitlikleri sağlanır. Dolayısıyla, 5d ve 6'dan dolayı,

$$\rho_U(A, B) + \rho_U(B, C) = \rho_V(A, \underline{B}) + \rho_V(\underline{B}, C) = \rho_V(A, C) \geq \rho_U(A, C).$$

Hilbert Mesafesi

X bir küme olsun. $d : X \times X \to \mathbb{R}$, şu özellikleri sağlayan bir fonksiyon olsun: Her x, y, $z \in X$ için,

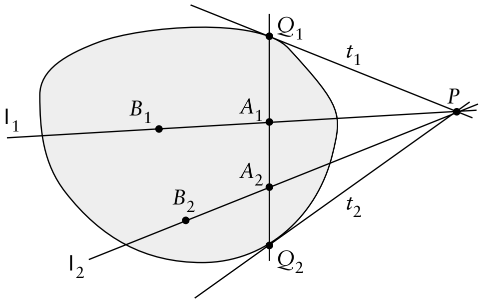
a) $d(x, y) \geq 0$,
b) $d(x, y)$, ancak ve ancak $x = y$ ise 0'dır,
c) $d(x, y) = d(y, x)$,
d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

O zaman d'ye X üzerine ***mesafe*** adı verilir.
Eğer $U \subset \mathbb{R}^2$ içbükey ve sınırlı bir kümeyse, yukardaki sorulardan, ρ_U fonksiyonunun U üzerine bir mesafe olduğu çıkar. Bu mesafeye ***Hilbert mesafesi*** adı verilir.

8. [İki Doğru Arasındaki Mesafe.] *l_1 ve l_2, sınırlı bir içbükey alan olan U'yla kesişen, paralel olmayan ama $U \cup S(U)$ kümesinde kesişmeyen iki doğru olsun. l_1 ve l_2 doğrularının kesişim noktasına P diyelim. t_1 ve t_2, P noktasından geçen ve $S(U)$ kümesini kesen ama U'yu kesmeyen iki farklı doğru olsun* (örneğin t_1 ve t_2 teğet olabilirler U'ya) *$Q_1 \in t_1 \cap S(U)$ ve $Q_2 \in t_2 \cap S(U)$ olsun. Q_1Q_2 doğrusu l_1 ve l_2 doğrularını sırasıyla A_1 ve A_2 nokta-*

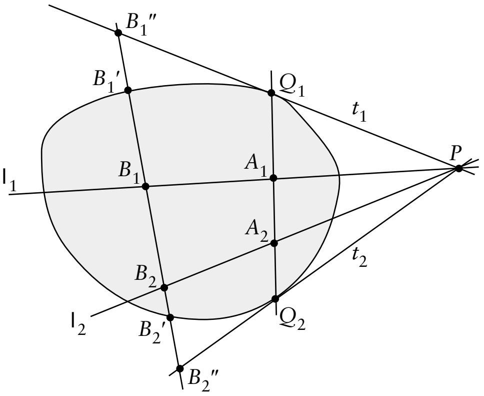
larında kessin. Her $B_1 \in l_1 \cap U$ *ve* $B_2 \in l_2 \cap U$ *için* $\rho_U(A_1, A_2) \le \rho_U(B_1, B_2)$ *eşitsizliğini kanıtlayın.*

Kanıt: Aşağıdaki şekilden kanıtı izleyin. $B_1 \in l_1$ ve $B_2 \in l_2$, U'da herhangi iki nokta olsun. B_1',



B_2', B_1'', B_2'' şekildeki gibi olsun. V, t_1 ve t_2 doğruları tarafından sınırlanan ve U'yu ve B_1'', B_2'' noktalarını içeren herhangi bir sınırlı ve içbükey alan olsun. 6 ve 2b'den dolayı

$\rho_U(B_1, B_2) \ge \rho_V(B_1, B_2) = \rho_V(A_1, A_2) = \rho_U(A_1, A_2)$ dir.



9. *U,* l_1, l_2, A_1 *ve* A_2 *yukardaki gibi olsun.* $\rho_U(A_1, A_2)$ *sayısına* l_1 ve l_2 doğrularının (ρ_U'ya göre) ***mesafesi*** *adı verilir.*

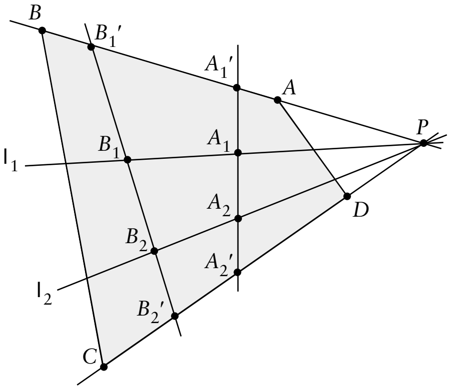
9a. l_1 *ve* l_2 *doğrularının* A_1 *ve* A_2 *noktalarından başka noktaları da aynı* $\rho_U(A_1, A_2)$ *mesafesini verebilirler. Böyle bir örnek verin.*

9b. *Eğer U bir daireyse,* l_1 *ve* l_2*'nin* A_1 *ve* A_2 *noktalarından başka noktalarının* $\rho_U(A_1, A_2)$ *mesafesini veremeyeceğini kanıtlayın, yani her* $B_1 \in l_1$, $B_2 \in l_2$ *için, eğer* $B_1 \ne A_1$ *ya da* $B_2 \ne A_2$ *ise*

$$\rho_U(A_1, A_2) < \rho_U(B_1, B_2)$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

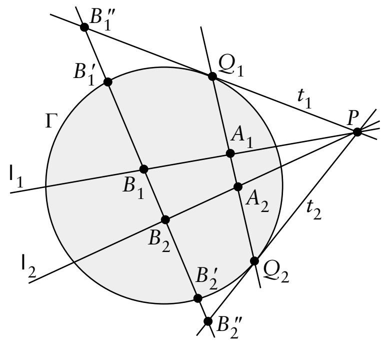
Çözüm. 9a. AB ve CD doğrularının P'de kesiştiği bir $ABCD$ dörtgeni alalım. U bu dörtgenin içi olsun. l_1 ve l_2, P'den geçen ve U'yu kesen iki doğru olsun. $A_1, B_1 \in l_1 \cap U$ ve $A_2, B_2 \in l_2 \cap U$ olsun. A_1A_2 ve B_1B_2 doğruları, AB ve CD doğruları-



nı yukardaki şekildeki gibi A_1', B_1', A_2', B_2' noktalarında kessin. 2b'ye göre,

$$\begin{aligned}\rho_U(A_1, A_2) &= \ln(A_1, A_2, A_2', A_1') \\ &= \ln(B_1, B_2, B_2', B_1') = \rho_U(B_1, B_2).\end{aligned}$$

9b. Γ, U dairesinin sınırı, yani çemberi olsun. P, $l_1 \cap l_2 \cap t_1 \cap t_2$ noktası olsun. B_1B_2 doğrusu t_1 ve t_2 teğetlerini B_1'' ve B_2'' noktalarında, Γ çemberini de B_1' ve B_2' noktalarında kessin.



Eğer $(B_1, B_2) \ne (A_1, A_2)$ ise o zaman ya $B_1' \ne B_1''$ ya da $B_2' \ne B_2''$. Çapraz oranın tanımından

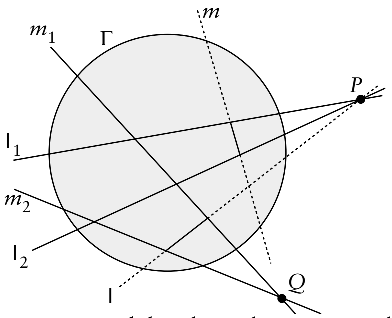
$$(B_1, B_2, B_2'', B_1'') < (B_1, B_2, B_2', B_1')$$

çıkar ve bundan ve 2b'den,

$$\begin{aligned}\rho_U(B_1, B_2) &= \ln(B_1, B_2, B_2', B_1') \\ &> \ln(B_1, B_2, B_2'', B_1'') \\ &= \ln(A_1, A_2, Q_2, Q_1) = \rho_U(A_1, A_2)\end{aligned}$$

çıkar.

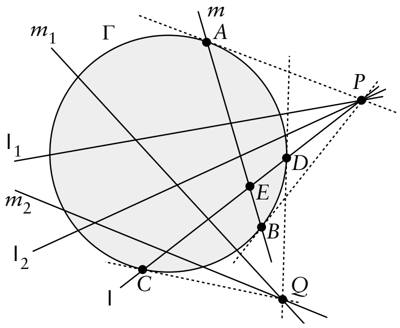
10. Γ *bir çember olsun. U,* Γ *çemberiyle sınırlanan dairenin içi olsun. P ve Q,* Γ*'nın dışında kalan alandan seçilmiş iki nokta olsun.* l_1 *ve* l_2 *doğruları P'den,* m_1 *ve* m_2 *doğruları da Q'den geçen ve U'dan noktalar içeren dört doğru olsun.* l *doğrusu* m_1 *ile* m_2 *arasındaki* ρ_U *mesafesini (bkz. problem 8 ve 9b) veren iki noktayı içeren doğru olsun. Aynı şekilde, m doğrusu* l_1 *ile* l_2 *arasındaki* ρ_U *mesafesini veren iki noktayı içeren doğru olsun. Eğer* l *doğrusu, P noktasından geçiyorsa, m doğrusunun Q noktasından geçmesi gerektiğini kanıtlayın.*



Çözüm: Farzedelim ki P'den Γ'ya çizilen iki teğet doğrusu Γ üzerinde A ve B noktalarından, Q'dan Γ'ya çizilen iki teğet doğrusu ise Γ üzerinde C ve D noktalarından geçsin. Varsayımdan, 8'inci sorudan ve 9b'den dolayı CD doğrusunun l doğrusuna eşit olduğunu, yani P noktasından geçtiğini biliyoruz. AB ve CD doğrularının kesişim noktasına E diyelim. Bu durumda 1'inci ve 4'üncü soruyu kullanarak

$$(A, B, C, D)^2 = (C, D, A, B)^2 = (E, E, A, B) = 1$$

eşitliğini buluruz.



Şimdi QA ile CD'nin kesişim noktasına A' ve QB ile CD'nin kesişim noktasına ise B' diyelim. Bu durumda yine 4'üncü soruyu kullanarak

$$1 = (A, B, D, C)^2 = (A', B', D, C)$$

bulunur ki bu $A' = B'$ demektir. Bunun sonucu olarak Q noktasının AB üzerinde olması gerektiği ortaya çıkar.

11. *Yukarıdaki problemleri çözerken bulduğunuz farklı çapraz oran formüllerini listeleyiniz.*

Çözüm Önerisi. A_1, A_2, A_3, A_4 düzlemin bir doğrusunun dört noktası olsun. Bu doğru üstünde olmayan herhangi bir P noktası için, PA_1, PA_2, PA_3, PA_4 doğrularını ele alalım. 2b'yi çözerken, eğer $\lambda_{ij} = m(A_iPA_j)$ ise

$$(A_1,A_2,A_3,A_4) = \frac{d(A_1,PA_3)}{d(A_1,PA_4)} = \frac{d(A_2,PA_3)}{d(A_2,PA_4)} = \frac{\sin\lambda_{13}}{\sin\lambda_{14}} : \frac{\sin\lambda_{23}}{\sin\lambda_{24}}.$$

eşitliklerini görmüştük. Ayrıca, kolayca görüleceği üzere,

$$\text{Alan}(A_iPA_j) = PA_j \cdot PA_j \cdot \sin\lambda_{ij}$$

olduğundan,

$$(A_1,A_2,A_3,A_4) = \frac{\text{Alan}(A_1PA_3)}{\text{Alan}(A_1PA_4)} : \frac{\text{Alan}(A_2PA_3)}{\text{Alan}(A_2PA_4)}.$$

♠

Cahit Arf Günleri Sıralaması

1	Mehmet Murat	Sevim	İstanbul Atatürk Fen L.	85
2	Kerim	Keskin	TEV İnanç Türkeş Ö. L./Gebze	74
3	Öykü	Çobanoğlu	İzmir Ö. Fatih Fen L.	70
4	Halenur	Kazaçeşme	Ö. Şehzade Mehmet L./Manisa	65
5	Türkü	Çobanoğlu	İzmir Ö. Fatih Fen L.	61
6	Büşra	Acar	İstanbul Atatürk Fen L.	60
7	Deniz	Yörükoğlu	İstanbul Atatürk Fen L.	60
8	Ezgi	Kantarcı	Robert Koleji	53
9	Yunus	Şaşmaz	TEV İnanç Türkeş Ö. L./Gebze	52
10	Hasan Hüseyin	Eruslu	Ö. Şehzade Mehmet L./Manisa	45
10	Şükrü Burç	Eryılmaz	İzmir Ö. Fatih Fen L.	45
10	Onur	Tidin	İzmir Ö. Fatih Fen Lisesi	45
	Ramazan	Akdağ	İstanbul Atatürk Fen Lisesi	
	Tansel	Altınel	Ö. Sevgi Çiçeği Anafen Fen Lisesi	
	Burak	Arkan	Sakıp Sabancı Anadolu L.	
	Taylan	Ayken	Ö. Üsküdar Amerikan L.	
	Fatih	Balcı	Ö. Gökkuşağı L.	
	Emre	Demirkaya	Galatasaray L.	
	Ali	Efe	Ö. Sevgi Çiçeği Anafen Fen L.	
	Abdüsselam	Genç	İstanbul Atatürk Fen L.	
	İlyas	Gölcüklü	Ö. Kasımoglu Fen L.	